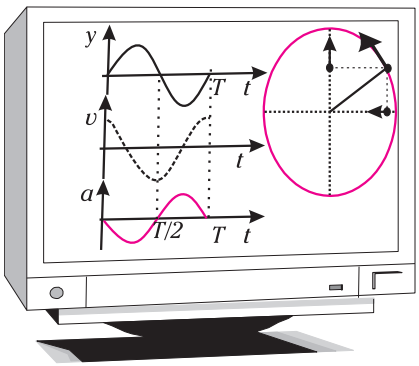
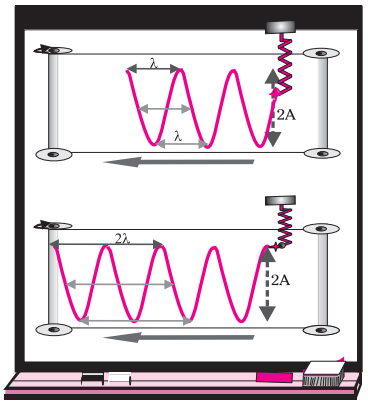
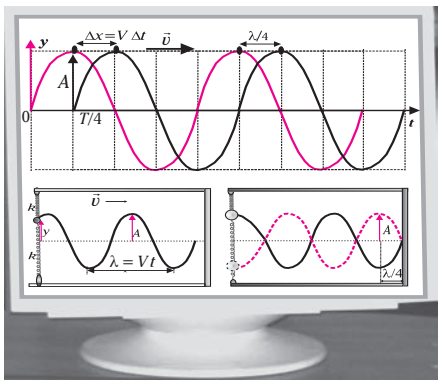
Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

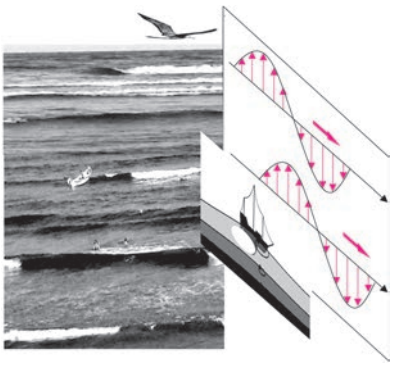
CAPITOLUL 1

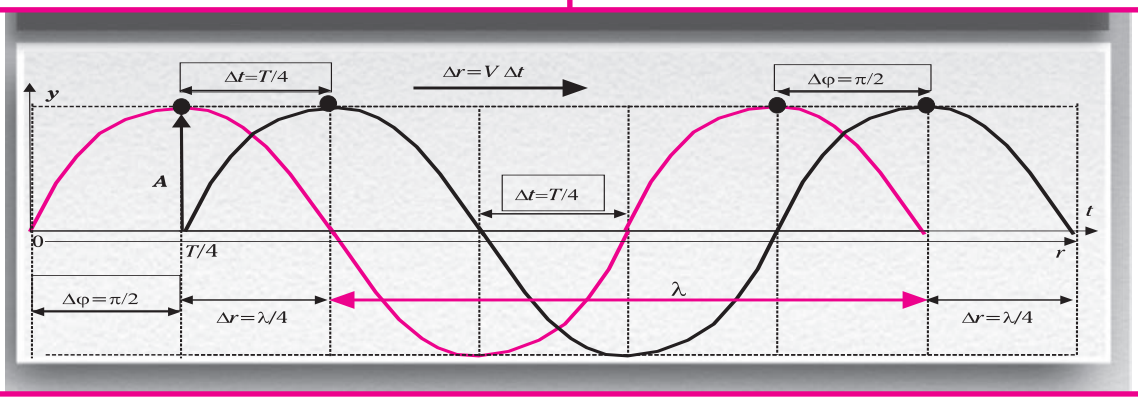
OSCILAȚII ȘI UNDE MECANICE











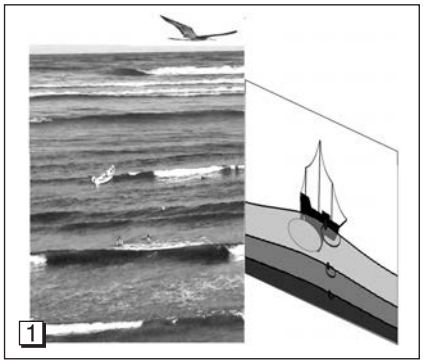
„Sunt convins că, dacă vreun om de știință din orice domeniu și-a adjudecat binemeritata recunoaștere a colectivității umane, acest lucru l-a realizat în mare măsură aplicând direct binefacerile fizicii ca legități, ca metodologie, ca instrumentar de lucru.”

Alfred Kastler — premiul Nobel, 1966

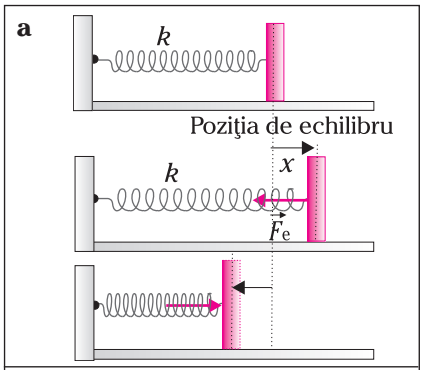
Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

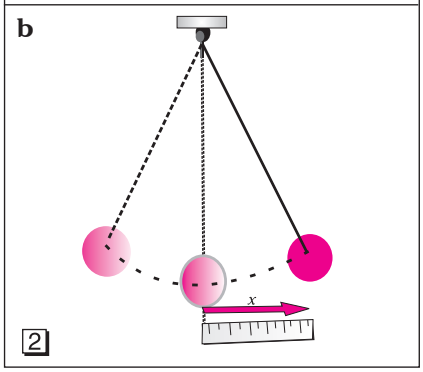
1.1. OSCILATORUL MECANIC

1.1.1. Fenomene periodice. Procese oscilatorii în natură şi în tehnică



1





2

ⓘ *Analiza calitativă de tip cauză-efect a unor oscilații mecanice*
Sistemele scoase din poziția de echilibru de forțe exterioare execută mișcări oscilatorii față de poziția de echilibru, atunci când sunt lăsate libere, sub acțiunea:
a) forței elastice din resort;
b) componentei tangențiale a greutății.

Oscilaţia este fenomenul fizic în decursul căruia o mărime fizică variază periodic.

Aproape la tot pasul, întâlnim fenomene care se repetă ciclic: vibraţiile unei lame sau corzi de instrument muzical, mişcarea unui balansoar sau a unui pendul, oscilaţiile plantelor sau crengilor pomilor, vibraţiile geamurilor sau ale boxelor audio, mişcările pistoanelor motoarelor sau ale coloanelor de apă, mişcarea corpurilor care plutesc în apa cu valuri (vezi 1). Oscilaţiile atomilor din corpurile cu structură cristalină sau deplasările electronilor din circuitele de curent alternativ evoluează periodic între două stări extreme în care se schimbă sensul mişcării.

Sistemul care efectuează o mişcare oscilatorie este numit **oscilator**. Mişcarea oscilatorului (sistemului oscilant) se reia din poziţia iniţială după o perioadă. Sistemele scoase din poziţia de echilibru de forţe exterioare tind să revină, atunci când sunt lăsate libere, în poziţia de echilibru, după ce execută mişcări oscilatorii numite **oscilaţii**. Distanţa oscilatorului (notată cu x sau y) faţă de poziţia de echilibru, la un moment dat, este numită **elongaţie** (vezi 2). La oscilatoarele elastice, cum ar fi lama elastică sau resortul elastic, forţa de revenire este de natură elastică.

Din punct de vedere energetic, în mişcarea oscilatorie se transformă periodic o formă de energie în altă formă de energie, în mod reversibil (în cazul ideal, când energia totală se conservă) sau numai parţial reversibil (în cazul real, când intervin pierderi energetice). În cazul oscilaţiilor mecanice ale unui corp faţă de o poziţie de echilibru, energia cinetică se transformă periodic în energie potenţială şi invers. Analog se pot explica şi alte procese oscilatorii din natură şi din tehnică.

Amplitudinea A este depărtarea maximă faţă de poziţia de echilibru. Micşorarea amplitudinii în timp, numită **amortizare**, se produce datorită pierderilor de energie prin frecare. Dacă oscilatorul este forţat să oscileze sub acţiunea unor forţe exterioare periodice, amplitudinea poate fi modificată sau menţinută constantă. Pentru modelul de oscilator nedisipativ, mişcarea oscilatorie este neamortizată.

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

1.1.2. Mărimi caracteristice mișcării oscilatorii

• **Perioada *T*** a unei oscilaţii reprezintă intervalul de timp după care oscilatorul trece din nou printr-un punct, mişcându-se în acelaşi sens; $[T]_{S.I.} = s$.

Dacă notăm cu $f(t)$ mărimea fizică a unei oscilaţii şi cu T perioada oscilaţiei, atunci $f(t+T)=f(t)$, adică mărimea fizică are aceeaşi valoare la momentele t şi $t+T$ (vezi 3).

• **Frecvenţa** ν este raportul dintre numărul n de oscilaţii efectuate şi timpul t în care se efectuează: $\nu = \frac{n}{t} = \frac{1}{T}$;

$$[\nu]_{S.I.} = s^{-1} = \text{Hz (Hertz)}.$$

• **Elongaţia *y*** măsoară distanţa momentană a centrului de masă al oscilatorului faţă de poziţia de echilibru static. Valoarea maximă y_{max} a elongaţiei într-o oscilaţie reprezintă amplitudinea A a oscilaţiilor; $[y]_{S.I.} = [A]_{S.I.} = m$.

Să proiectăm mişcarea circulară uniformă a unei bile pe un plan perpendicular pe planul cercului de rază $\boldsymbol{R}$ (vezi 4). Să considerăm că mobilul (bila) pleacă dintr-un punct M_0, care este defazat cu un unghi φ_0 faţă de axa aleasă (vezi 5). Proiecţia vectorului de poziţie, de modul $\boldsymbol{A = R}$, când mobilul este în poziţiile M, caracterizate de unghiul fazei, $\varphi = \omega t + \varphi_0$, descrie pe axa Oy mişcarea oscilatorie de ecuaţie $y = R \sin \varphi$, adică:

$$\boldsymbol{y = A\sin(\omega t + \varphi_0)},$$

unde $y_{max} = A$, $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ reprezintă pulsaţia, T — perioada, iar $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ — frecvenţa mişcării.

• **Viteza de oscilaţie** este definită prin relaţia: $v = \frac{\Delta y}{\Delta t}$, unde $\Delta t \to 0$. Viteza de oscilaţie se poate obţine prin proiecţia vectorului viteză $\vec{v}_M$ pe axa Oy. Obţinem: $v = v_M \cos\varphi$;

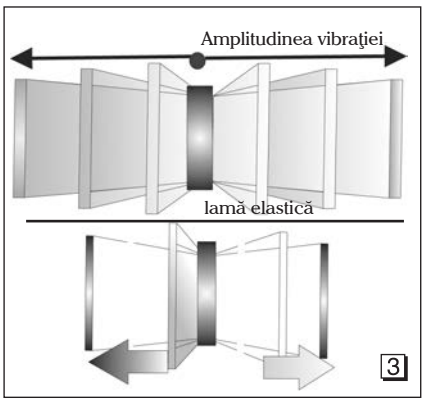
$$\boldsymbol{v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)},$$

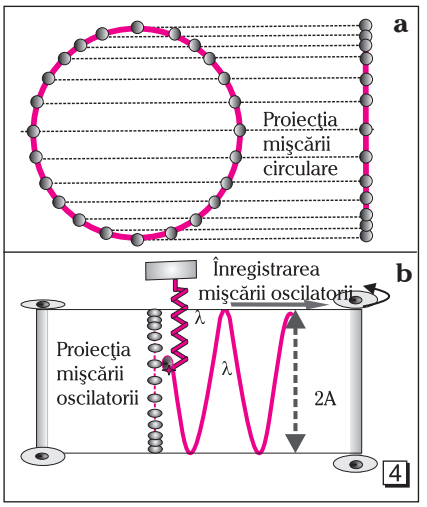
unde $v_{max} = \omega R = \omega A$.

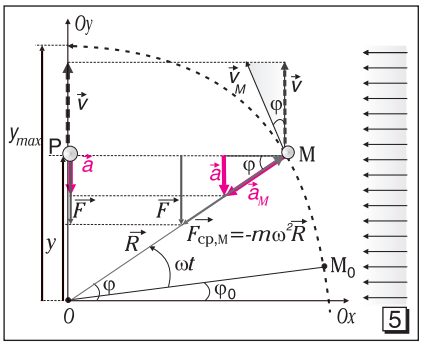
• **Acceleraţia de oscilaţie** este definită prin relaţia: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, unde $\Delta t \to 0$. Acceleraţia de oscilaţie se obţine prin proiecţia vectorului acceleraţie centripetă $\vec{a}_M$ pe axa Oy: $-a = a_M \sin\varphi$;

$$\boldsymbol{a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0)},$$

unde $a_{max} = \omega^2 R = \omega^2 A$.





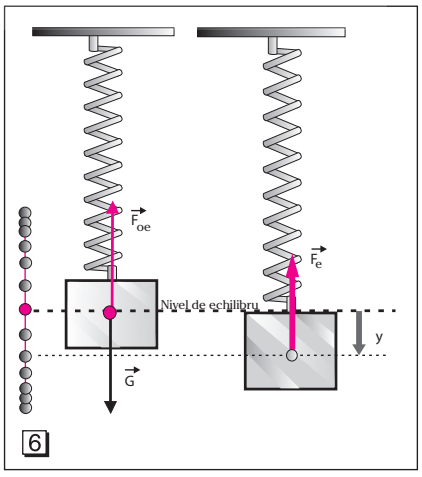


Faza mișcării oscilatorii este argumentul funcției trigonometrice:

$$\boldsymbol{\varphi = \omega t + \varphi_0}.$$

Dacă la momentul inițial, $t_0 = 0$, oscilatorul nu a fost în poziția de echilibru, atunci faza inițială este φ_0 (diferită de 0 sau π), $y_0 = A \sin(\varphi_0) \neq 0$.

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți



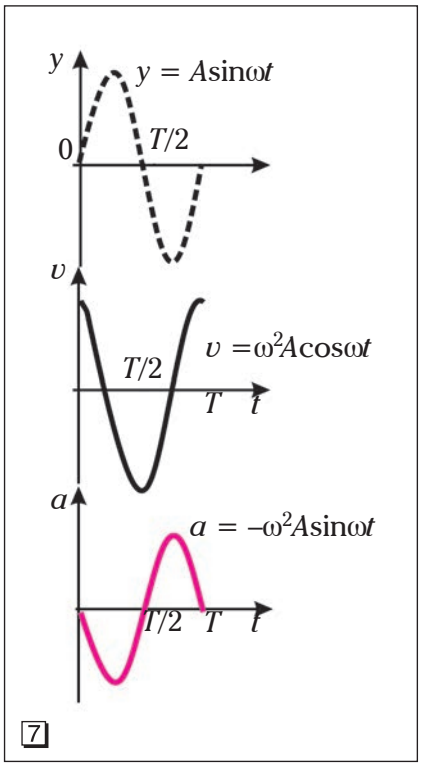
6

Oscilaţiile armonice sunt oscilaţii care se desfăşoară sub acţiunea unei forţe rezultante de tip elastic

$$F = -ky,$$

unde y — elongaţia, k — constanta de elasticitate. Acceleraţia de oscilaţie este proporţională cu elongaţia, dar de sens contrar în orice mişcare oscilatorie liniar armonică. Mărimile caracteristice se pot exprima prin funcţii trigonometrice (sinus, cosinus).

Pendulul elastic este un model idealizat pentru sistemele oscilante. Este format dintr-un resort elastic cu masa neglijabilă, de care este legat un corp cu masa m. Forţa elastică $F = -ky$ este proporţională cu elongaţia, dacă nu se ajunge la limita de elasticitate a resortului (vezi 6). Forţele de frecare sunt neglijabile când corpul are dimensiuni mici şi pendulul oscilează în aer. Un sistem fizic izolat, care este pus în oscilaţie printr-un impuls, efectuează *oscilaţii libere*, cu o frecvenţă *proprie*.



7

Tipuri de oscilaţii:

♦ oscilaţii mecanice (energia cinetică se transformă în energie potenţială şi invers);

♦ oscilaţii electromagnetice (energia electrică se transformă în energie magnetică şi invers);

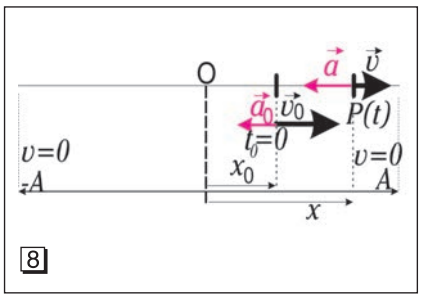
♦ oscilaţii electromecanice (energia mecanică se transformă în energie electromagnetică şi invers).

Oscilaţiile se numesc:

♦ **nedisipative**, **ideale** sau **neamortizate** dacă energia totală se conservă;

♦ **disipative** sau **amortizate** dacă energia se consumă în timp;

♦ **forţate** sau **întreţinute** dacă se furnizează energie din afara sistemului, pentru compensarea energiei consumate.



8

Problemă rezolvată

Oscilaţiile unui pendul elastic au mărimile caracteristice din reprezentarea grafică 7. În ce poziţie, acceleraţia corpului care oscilează la un capăt al resortului elastic este minimă?

Rezolvare:

Deoarece acceleraţia de oscilaţie este proporţională cu elongaţia, dar de sens contrar în orice mişcarea oscilatorie armonică a pendul elastic, acceleraţia corpului care oscilează este minimă atunci când elongaţia este maximă (vezi 8).

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

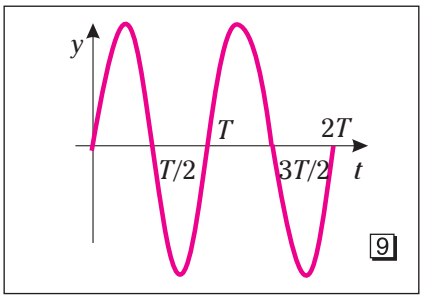
Probleme propuse

1. Legea de oscilaţie în cazul unei oscilaţii armonice (vezi 9) este definită prin relaţia:
a) $y(t) = A\sin\omega t$;
b) $y(t) = A\omega\sin\omega t$;
c) $y(t) = A\omega\sin(\omega + t)$;
d) $y(t) = A\omega\sin(\omega - t)$.

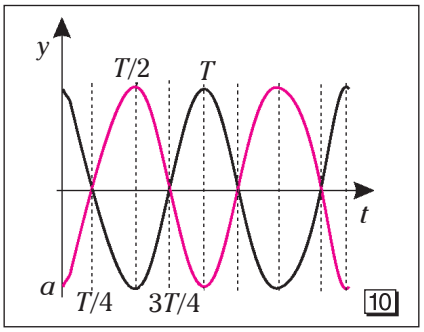
2. Acceleraţia de oscilaţie este proporţională cu elongaţia, dar de sens contrar în orice mişcare oscilatorie armonică . Dacă $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ şi $a = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0)$ (vezi 10), la momentul iniţial $t_0 = 0$ faza iniţială φ_0 este egală cu:
a) π; b) zero; c) 2π; d) $0{,}5\pi$.

3. În cazul unei oscilaţii armonice, viteza maximă se atinge:
a) când corpul trece prin poziţia de echilibru;
b) când elongaţia este maximă;
c) la o treime din perioadă;
d) la jumătate din perioadă.

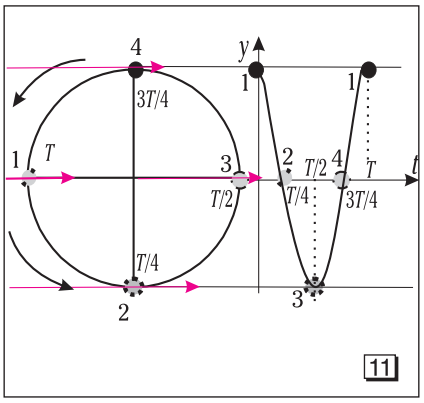
4. Un corp efectuează o mişcare oscilatorie cu o perioadă T=4 s. La momentul $t = 0$, corpul trece prin poziţia de elongaţie maximă (vezi 11). Corpul ajunge în poziţia de elongaţie minimă în timpul minim:
a) 0,5 s; b) 1 s; c) 2 s; d) 3 s.



9



10



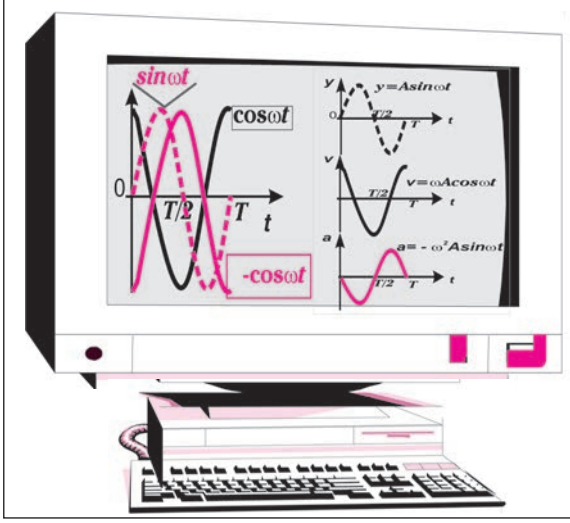
11

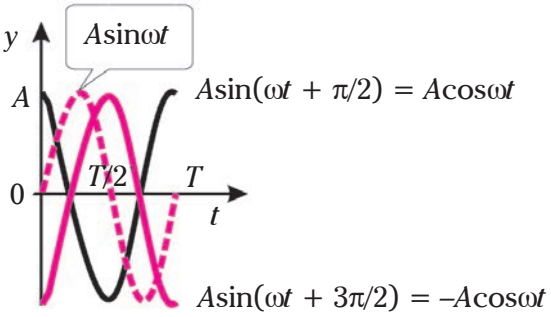
Răspunsuri:

1. a. **2.** d. **3.** a. **4.** c.

Observaţie:

Simulările pe calculator (vezi 12) ne ajută să înţelegem mai bine mărimile caracteristice ale mişcării oscilatorii!

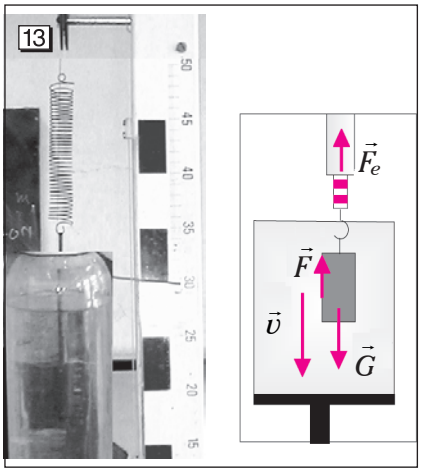




12

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

1.1.3. Oscilaţii mecanice amortizate



Amplitudinea rămâne constantă în cursul oscilaţiilor libere neamortizate, deoarece frecările sunt neglijabile. Sistemele oscilante reale sunt supuse unor forţe de frânare. Cauza amortizării, adică a reducerii amplitudinii în cursul oscilaţiilor, este pierderea de energie datorată frecărilor care apar în mediile vâscoase (vezi 13). Acea parte a energiei care se pierde prin frecare se transformă în căldură. În condiţiile în care oscilaţiile se amortizează într-un interval de timp mare, atunci forţele de frecare sunt mici.

Oscilaţii se numesc **disipative** sau **amortizate** dacă energia se consumă în timp. Nivelul de echilibru static este definit prin deformaţia $y_0 = \Delta l_s$ a resortului, obţinută prin proiecţia relaţiei

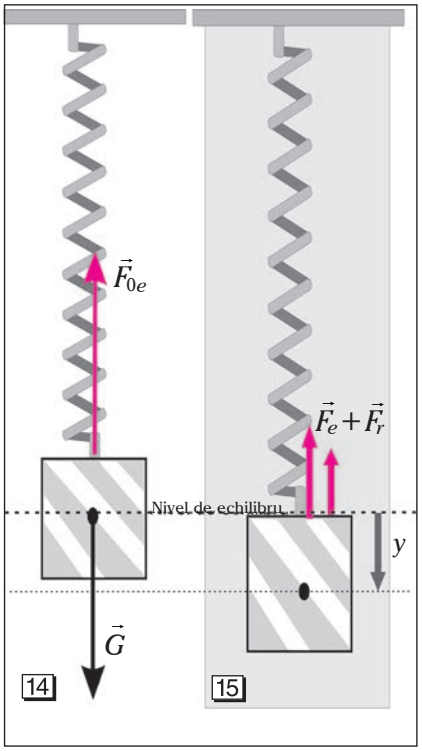
$$\vec{G} + \vec{F}_{0e} = 0 \text{ (vezi 14)},$$

pe direcţia verticală:

$$mg - ky_0 = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{mg}{k}.$$

Forţa rezultantă în timpul oscilaţiilor cu elongaţia y faţă de nivelul de echilibru static este:

$$\vec{F} = \vec{F}_y + \vec{G} = m\vec{a}.$$



Rezultă $-k(y + y_0) + mg = ma$ sau $-ky = ma$,
deoarece $mg - ky_0 = 0$,
adică $a = -\frac{k}{m} \cdot y = -\omega^2 y$, unde $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Pulsaţia proprie a oscilaţiilor libere este: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

În majoritatea situaţiilor în care vitezele atinse în mişcările oscilatorii sunt mici, se consideră că forţele de frecare sunt *proporţionale cu vitezele de oscilaţie* şi opuse acestora:

$$F_f = -rv,$$

unde r este factor de proporţionalitate pozitiv care depinde de natura mediului fluid şi de dimensiunile oscilatorului.

Ecuaţia mişcării oscilatorii amortizate a unui corp, care oscilează sub acţiunea unei forţe de tip elastic F_e întâmpinând din partea mediului o forţă de frecare F_f (vezi 15), se obţine folosind principiul fundamental al mecanicii newtoniene:

$$-ky - rv = ma.$$

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

Soluţia acestei ecuaţii este elongaţia oscilatorului amortizat:

$$y = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega t + \varphi_0),$$

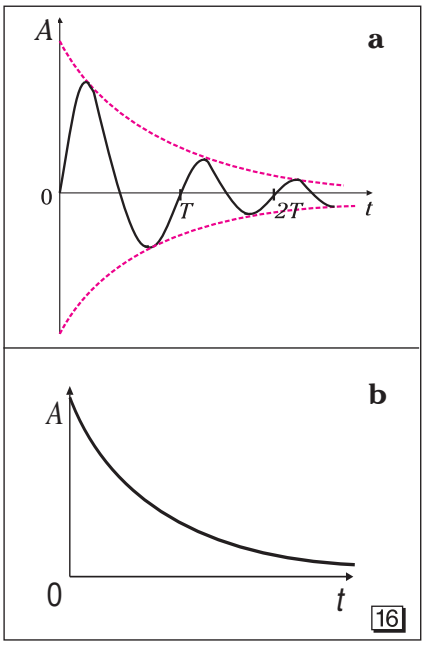
unde $\alpha = \frac{r}{2m}$ se numeşte **coeficient de amortizare.**

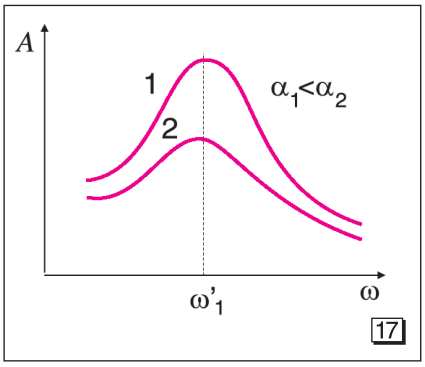
Dacă α are valori mici, mişcarea este *oscilatorie amortizată,* deoarece amplitudinea oscilaţiilor scade exponenţial în timpul mişcării (vezi 16**a**).

Dacă α are valori mari, sistemul revine în poziţia de echilibru fără să efectueze mişcări oscilatorii, adică mişcarea oscilatorului devine aperiodică (vezi 16**b**).

Se constată experimental că perioada de oscilaţie a unui sistem în ulei este mai mare faţă de perioada de oscilaţie a sistemului în apă.

O amplitudine constantă a mişcării oscilatorii se poate menţine dacă asupra oscilatorului acţionează o forţă exterioară periodică, ce efectuează în fiecare perioadă un lucru mecanic egal cu energia pierdută datorită amortizării. Astfel de mişcări oscilatorii, în care asupra oscilatorului acţionează atât forţele elastice şi forţele de frânare, cât şi forţele periodice exterioare, se numesc **întreţinute** sau **forţate**. Amplitudinea oscilatorului întreţinut depinde de pulsaţia ω a forţei periodice exterioare, prezentând un maximum pentru valori ω'_1 ale pulsaţiei forţei apropiate de pulsaţia proprie ω_0 a oscilatorului (vezi 17).





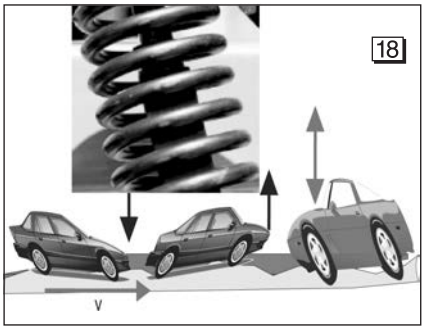
Probleme propuse

Analizează afirmaţiile următoare şi răspunde cu A (adevărat) sau F (fals):

1. Un resort, având capetele fixate pe axa roţii şi pe şasiul automobilului, asigură atenuarea oscilaţiilor.

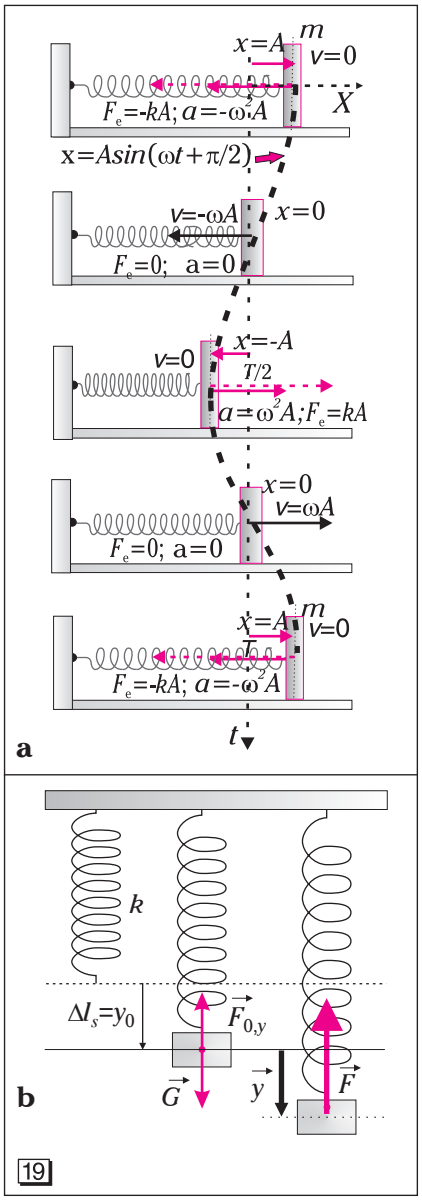
2. Amortizoarele pentru automobile sunt compuse dintr-un cilindru cu ulei în care se află un piston. Un amortizor este defect dacă automobilul efectuează mişcări oscilatorii pe verticală (vezi 18).

3. Mişcarea oscilatorie a unui automobil, produsă de o denivelare a drumului, este aperiodică pe verticală dacă amortizoarele sunt bune.



Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

1.1.4. *Modelul „oscilator armonic”



Forța rezultantă în timpul oscilațiilor pe verticală este:

$$\vec{F} = \vec{F}_y + \vec{G} = m\vec{a}.$$

Proiectăm relația vectorială pe verticală și obținem:

$$-k(y + y_0) + mg = ma.$$

Deoarece $mg - ky_0 = 0$, rezultă:

$$-ky = ma \Rightarrow a = -\frac{k}{m} \cdot y = -\omega^2 y.$$

Oscilaţiile se numesc **liniar armonice** dacă se efectuează sub acţiunea unor forţe de tip elastic, îndreptate spre poziţia de echilibru static, pentru care este valabilă legea lui Hooke:

$$F_e = -kx,$$

unde x este elongaţia (depărtarea faţă de poziţia de echilibru), iar oscilatorul se numeşte **armonic** (vezi 19**a**).

Semnul minus arată că forţa elastică exercitată asupra corpului este opusă elongaţiei, notată cu $\boldsymbol{x}$ sau $\boldsymbol{y}$.

Dacă asupra unui oscilator acţionează forţe de frecare mici, atunci oscilaţiile sunt slab amortizate (se amortizează într-un interval de timp mare) şi putem folosi modelul **„oscilator armonic”**. Oscilatorul armonic constituie modelul unui proces periodic ideal.

Considerăm că asupra corpului oscilant de masă m acţionează o forţă rezultantă elastică (vezi 19**b**) sau cvasielastică (de natură neelastică):

$$ma = F_e = -ky,$$

deci $a = -\frac{k}{m}y = -\omega^2 y$, unde $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Pulsaţia proprie a mişcării ω depinde de perioada T de oscilaţie:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

După înlocuiri, se obţine expresia **perioadei oscilatorului armonic:**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Acceleraţia şi elongaţia sunt proporţionale, dar de semne opuse.

Pendulul elastic este un oscilator liniar armonic . Oscilaţiile pendulului elastic sunt:

— liniare, deoarece sunt produse de o parte şi de alta a poziţiei de echilibru static;

— armonice, deoarece sunt produse sub acţiunea forţelor de tip elastic, iar acceleraţia momentană este proporţională şi de semn opus cu elongaţia (vezi 19**b**).

Reţine!

Un **oscilator** execută o **mişcare oscilatorie armonică** atunci când asupra acestuia acţionează forţe rezultante de tip elastic, iar acceleraţia momentană este proporţională şi de semn opus cu elongaţia. Elongaţia oscilatorului se exprimă prin funcţii trigonometrice (sinus sau cosinus) cunoscute sub numele de **funcţii armonice**.

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

*Descrierea oscilaţiei armonice utilizând relaţiile dintre mărimile caracteristice (recapitulare)

Ştii că mişcarea oscilatorie liniar armonică, caracterizată de faza $\varphi = \omega t + \varphi_0$, unde ω reprezintă pulsaţia mişcării, coincide cu mişcarea proiecţiei pe diametrul vertical al punctului M care se roteşte pe un cerc de rază egală cu amplitudinea oscilaţiei (vezi 20). Mişcarea oscilatorie liniar armonică are **legea de mişcare**:

$$y = A\sin\varphi = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Faza mişcării oscilatorii este argumentul funcţiei trigonometrice.

Dacă la momentul iniţial $t_0 = 0$, faza iniţială este φ_0 (diferită de 0 sau π), atunci $y_0 = A\sin(\varphi_0) \neq 0$, deci oscilatorul nu a fost în poziţia de echilibru când am început cronometrarea oscilaţiilor.

Viteza de oscilaţie este definită prin relaţia: $v = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0)$.

Acceleraţia de oscilaţie este definită prin relaţia:

$$a = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y.$$

Defazajul iniţial $\Delta\varphi_0$ dintre două mărimi oscilante care au aceeaşi pulsaţie ω, rămâne constant în timp: $\Delta\varphi = \Delta\varphi_0$ (se calculează ca diferenţă de fază pentru aceeaşi funcţie trigonometrică). De la trigonometrie ştim că:

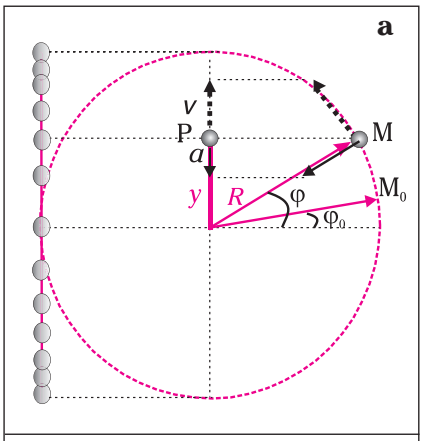
$$\sin\varphi = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad \cos\varphi = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

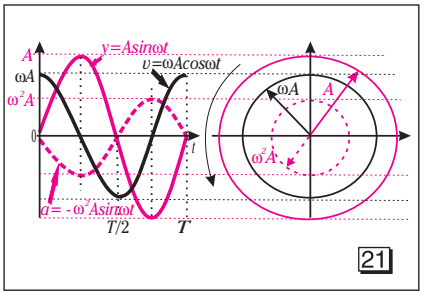
Mărimile fizice exprimate prin funcţiile trigonometrice sinus sau cosinus pot fi reprezentate prin **fazori** (vezi 21). Viteza de oscilaţie ajunge la valorile maxime în avans faţă de elongaţie cu un defazaj temporal $\Delta t = T/4$, căruia îi corespunde un defazaj unghiular $\Delta\varphi = \pi/2$.

Elongaţia y, viteza de oscilaţie v şi acceleraţia de oscilaţie a sunt mărimi oscilante defazate între ele cu $\Delta\varphi_{v-y} = \frac{\pi}{2}$, $\Delta\varphi_{a-v} = \frac{\pi}{2}$ şi $\Delta\varphi_{y-a} = \pi$ sau temporal cu: $\Delta t_{v-y} = \frac{T}{4}$, $\Delta t_{a-v} = \frac{T}{4}$ şi $\Delta t_{y-a} = \frac{T}{2}$.

Interpretarea defazajului

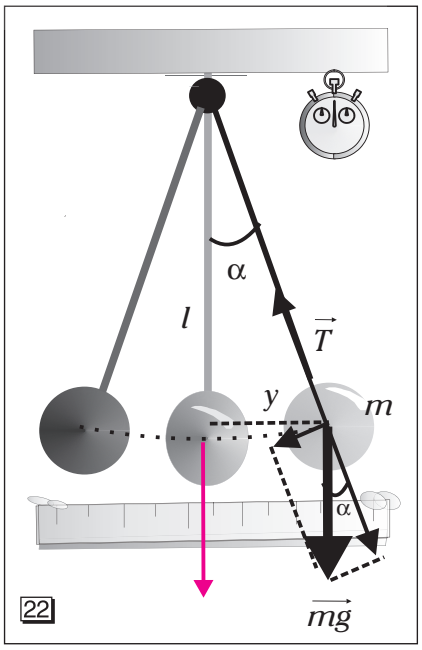
O mărime oscilantă îşi atinge valorile maxime, nule, minime sau intermediare după un interval de timp Δt în urma altei mărimi oscilante. Dacă o mărime este în avans faţă de altă mărime oscilantă cu $\Delta t_{v-y} = \frac{T}{4}$, atunci $\Delta t_{y-v} = -\frac{T}{4}$. Într-un caz oarecare, poţi folosi regula de trei simplă: $\begin{cases} 2\pi \ldots\ldots T \\ \Delta\varphi \ldots\ldots \Delta t \end{cases} \Rightarrow \Delta t = \frac{T\Delta\varphi}{2\pi}$.





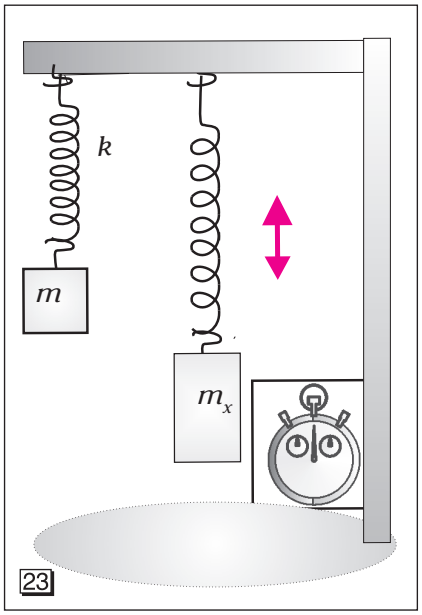
Fazorul este un vector care se rotește în sens trigonometric cu viteza unghiulară ω egală cu pulsația mărimii reprezentate, cu modulul egal cu valoarea maximă a acelei mărimi și a cărui poziție depinde de faza mișcării oscilatorii.

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți



22

ⓘ Pentru deviații mici, perioada de oscilație a unui pendul matematic este proporțională cu radicalul raportului dintre lungimea pendulului și accelerația gravitațională locală și este independentă de masa pendulului.



23

Se imprimă mișcări oscilatorii cu amplitudine mică.

*Modelul „oscilator armonic" în rezolvarea de probleme

1. Perioada de oscilaţie a pendulului elastic depinde de masa corpului care oscilează?

Rezolvare: Folosim relaţiile de definiţie ale pulsaţiei: $\omega = 2\pi/T$ și $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Perioada de oscilaţie a pendulului elastic este direct proporţională cu rădăcina pătrată din masa corpului care oscilează:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

2. Pendulul gravitaţional, realizat dintr-un corp punctiform, de masă m, care atârnă de un fir inextensibil, cu masa neglijabilă şi lungimea l, este tot un oscilator armonic (vezi 22). Perioada de oscilaţie a pendulului gravitaţional depinde de masa corpului care oscilează?

Rezolvare: Dacă este deviat cu un unghi $\alpha_{max} < 5°$ faţă de verticala care trece prin poziţia de echilibru şi este lăsat liber să oscileze, forţa de revenire G_{tg} nu este de natură elastică, dar este proporţională cu depărtarea faţă de poziţia de echilibru şi îndreptată în sens opus:

$$G_{tg} = -mg\sin\alpha = -mg\cdot\frac{y}{l} = -ky, \text{ unde } k = \frac{mg}{l} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{g}{l}.$$

Perioada de oscilaţie a pendulului matematic este direct proporţională cu rădăcina pătrată a raportului dintre lungimea pendulului şi acceleraţia gravitaţională locală:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

3. Cum putem cântări cu ajutorul oscilaţiilor unui pendulului elastic (vezi 23)?

Rezolvare: În această **problemă experimentală**, perioadele de oscilaţie ale unui pendulului elastic se pot calcula cu relaţia $T_i = \frac{t_i}{n_i}$, unde t_i este timpul în care s-au produs n_i oscilaţii.

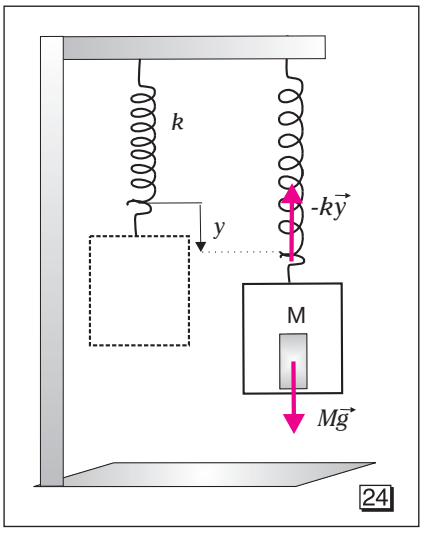
Folosind un corp cu masa cunoscută m şi un corp cu masa necunoscută m_x, exprimăm constanta de elasticitate k pentru fiecare caz: $k = 4\pi^2\cdot\frac{m}{T_1^2} = 4\pi^2\cdot\frac{m_x}{T_2^2}$. Dacă numărăm tot atâtea oscilaţii n, obţinem relaţiile pentru calcularea masei necunoscute:

$$m_x = m\cdot\frac{T_2^2}{T_1^2} \text{ sau } m_x = m\cdot\frac{t_2^2}{t_1^2}.$$

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

*Situaţii în care se poate aplica modelul „oscilator armonic”

Modelul „oscilator armonic” este util pentru studiul oscilatorilor mecanici simpli (pendulul elastic, pendulul gravitaţional).



24

Investigaţii experimentale

1. Determinarea acceleraţiei gravitaţionale cu un pendul elastic

Dacă lungimea resortului liber este l_0, prin suspendarea de acesta a corpului cu masa m, lungimea resortului devine l şi alungirea măsurată este: $y = l - l_0$ (vezi 24).

În poziţia de echilibru, forţa de greutate este egală cu forţa elastică: $mg = ky$, de unde rezultă $\frac{m}{k} = \frac{y}{g}$.

Înlocuim în perioada pendulului elastic şi obţinem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{y}{g}} \Rightarrow g = \frac{2\pi^2 y}{T^2}.$$

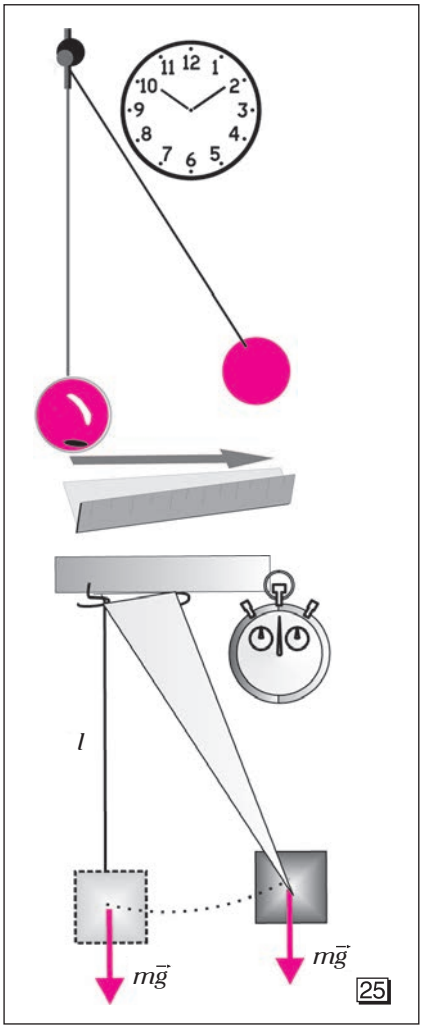
***Modul de lucru**:*

♦Se scoate corpul din poziţia de echilibru şi se numără n oscilaţii complete efectuate în intervalul de timp t, măsurat cu ajutorul unui ceasornic.

♦Raportul $T = t/n$ reprezintă perioada oscilaţiilor pendulului elastic. Rezultă $g = 4\pi^2 \cdot \frac{yn^2}{t^2}$.

♦Se repetă măsurarea perioadei de câteva ori şi se calculează valoarea medie a acceleraţiei gravitaţionale.

♦Valorile măsurate se notează într-un tabel.



25

2. Determinarea acceleraţiei gravitaţionale cu un pendul gravitaţional

Dispozitivul experimental este format dintr-un stativ pe care se fixează un pendul gravitaţional simplu sau bifilar, care îşi conservă planul de oscilaţie (vezi 25).

***Modul de lucru**:*

♦Se măsoară cu rigla lungimea pendulului.

♦Se scoate pendulul din poziţia de echilibru sub un unghi mai mic de 5 grade, se lasă să oscileze şi se numără $n \approx 50$ de oscilaţii complete în timpul t măsurat cu cronometrul.

♦Se repetă experimentul de câteva ori, mărind de fiecare dată lungimea pendulului. Folosim relaţia:

$$g = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{T^2} = 4\pi^2 \cdot \frac{ln^2}{t^2}.$$

♦Valorile măsurate se notează într-un tabel, din care putem determina erorile.

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

*Conservarea energiei în oscilaţiile armonice

În orice moment din cursul oscilaţiilor, energia mecanică totală, $W = E_t$, a oscilatorului armonic este egală cu suma dintre energia cinetică E_c a oscilatorului de masă m şi energia potenţială $E_{p,e}$ de deformare elastică:

$$E_t = E_c + E_{p,e},$$

unde $E_c = \frac{mv^2}{2}$, $E_{p,e} = \frac{ky^2}{2}$, $k = m\omega^2$, $\omega = 2\pi\nu$,

cu $v = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0)$ şi $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$.

După înlocuiri, obţinem:

$$E_c = \frac{m}{2}\cdot\omega^2 A^2\cos^2(\omega t + \varphi_0),\ E_{p,e} = \frac{k}{2}\cdot A^2\sin^2(\omega t + \varphi_0),$$

$$E_t = \frac{m\omega^2}{2}\cdot A^2\cos^2\varphi + \frac{k}{2}\cdot A^2\sin^2\varphi,\ \text{unde } \varphi = \omega t + \varphi_0.$$

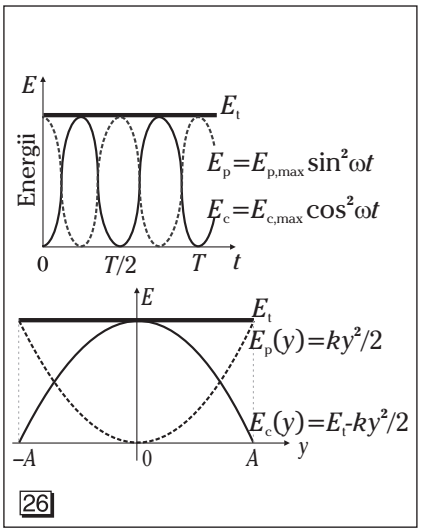
Deoarece $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, rezultă că **energia totală a oscilatorului armonic se conservă**:

$$E_t = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = 2\pi^2 m\nu^2 A^2 = \text{const.}$$

Putem considera cazul particular al oscilatorului cu faza iniţială $\varphi_0 = 0$ (vezi 26).

În timpul oscilaţiilor, o formă de energie se transformă în altă formă de energie. Energia cinetică maximă şi, respectiv, energia potenţială elastică maximă sunt egale cu energia totală:

$$E_c + E_p = E_{c,max} = E_{p,max} = \frac{1}{2}kA^2 = E_t.$$



26

ⓘ Curba energiei potențiale sugerează interpretarea următoare: oscilatorul s-ar mișca într-o „groapă de potențial”, având viteza maximă pe fundul gropii și schimbând sensul de mișcare la marginile gropii.

Energia mecanică a oscilatorului armonic este egală cu energia cinetică maximă, respectiv cu energia potențială elastică maximă.

Energiile cinetică, potențială și totală pot fi reprezentate grafic și în funcție de elongația $y \in [-A, A]$.

Când $y = 0$, energia cinetică este maximă și energia potențială este nulă, iar când $y = \pm A$, energia cinetică este nulă și energia potențială este maximă (egală cu E_t).

Probleme rezolvate

1. Putem obţine constanta elastică echivalentă a două oscilatoare armonice cu constantele elastice k_1 şi k_2 din conservarea energiei (vezi 27)?

Rezolvare:

Energia totală a două oscilatoare armonice se conservă: $E = E_1 + E_2$. Dacă sunt legate în paralel, obţinem:

$$\frac{k_{ep}A^2}{2} = \frac{k_1A_1^2}{2} + \frac{k_2A_2^2}{2}.$$

Deoarece $A_1 = A_2 = A$, obţinem constanta echivalentă a resorturilor legate în paralel:

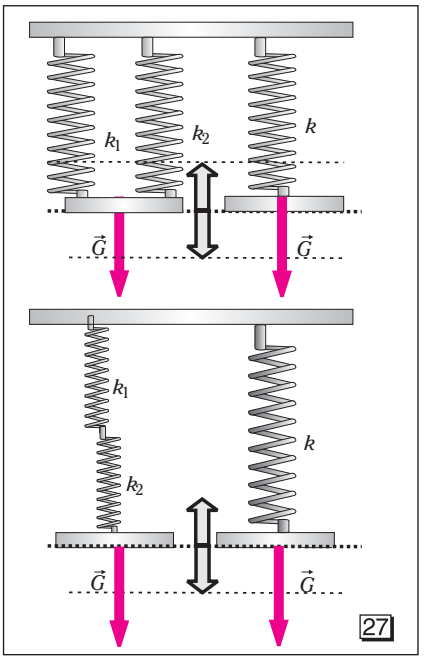
$$k_{ep} = k_1 + k_2.$$

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

Dacă oscilatoarele armonice sunt legate în serie, atunci forţa elastică are aceeaşi valoare: $k_1A_1 = k_2A_2 = k_{es}A$, iar amplitudinea totală este $A = A_1 + A_2$. Din conservarea energiei, obţinem constanta echivalentă a resorturilor legate în serie :

$$k_{es}A^2 = k_1A_1^2 + k_2A_2^2 = \frac{k_1^2A_1^2}{k_1} + \frac{k_2^2A_2^2}{k_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{es}A^2 = \frac{k_{es}^2A^2}{k_1} + \frac{k_{es}^2A^2}{k_2} \Rightarrow 1 = k_{es}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{k_{es}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$



27

2. Să demonstrăm expresia acceleraţiei de oscilaţie dacă viteza de oscilaţie are expresia $v(t) = v_{max}\cos(\omega t + \varphi_0)$, unde $\omega = 2\pi\nu$, (ν este frecvenţa), $\varphi = \omega t + \varphi_0$, $v_{max} = \omega A$.

Considerăm un interval de timp mic ($\Delta t \to 0$) între două momente de timp $t_1 = t$ şi, respectiv, $t_2 = t + \Delta t$. Deoarece nu ştim deocamdată limite şi derivate, vom folosi definiţia acceleraţiei: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$, şi relaţia trigonometrică:

$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$. Obţinem:

$$a = v_{max} \cdot \frac{\cos\left[\omega(t+\Delta t) + \varphi_0\right] - \cos\left[\omega t + \varphi_0\right]}{\Delta t} =$$

$$= -v_{max} \cdot \frac{2\sin\left(\omega t + \frac{\omega\Delta t}{2} + \varphi_0\right)\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\Delta t}.$$

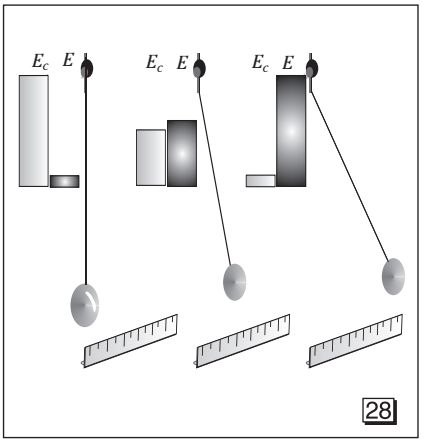
Înmulţim expresia atât la numărător, cât şi la numitor cu $\frac{\omega}{2}$ şi o aranjăm astfel: $a = -\omega v_{max} \cdot \frac{\sin\left(\omega t + \frac{\omega\Delta t}{2} + \varphi_0\right)\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega\Delta t}{2}}$.

Deoarece $\frac{\omega\Delta t}{2} \to 0$, aproximăm: $\frac{\sin\omega\Delta t}{2} \approx \frac{\omega\Delta t}{2}$. Rezultă expresia: $a = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y$, unde $a_{max} = \omega^2 A$.

Observaţie:

Pentru expresia elongaţiei $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, se poate demonstra analog că pentru un interval de timp mic ($\Delta t \to 0$) se obţine expresia vitezei de oscilaţie:

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0).$$



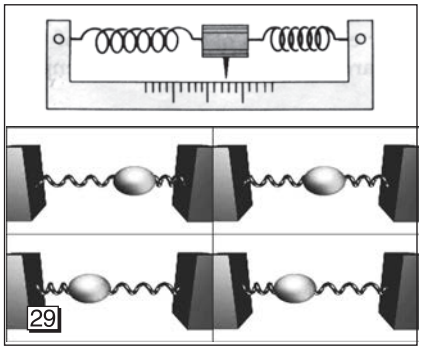
28

ⓘ Energia se conservă și cazul oscilațiilor pendulului gravitațional.
Pentru pendulul gravitațional cu masa m și lungimea l din figura 28, **energia totală se conservă:**

$$E_{c,\max} = E_c + E_p = E_{p,\max}.$$

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

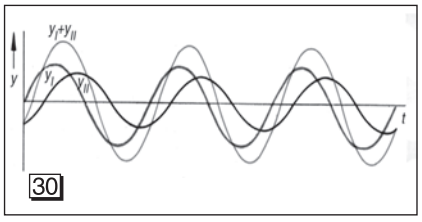
1.1.5. Compunerea oscilaţiilor paralele. *Compunerea oscilaţiilor perpendiculare


29

Descrierea calitativă a mişcării rezultate din compunerea a două oscilaţii

În practică, întâlnim situaţii în care mişcarea unui sistem este rezultatul compunerii unor oscilaţii. Astfel, un oscilator poate fi supus la două sau mai multe oscilaţii armonice paralele, de aceeaşi pulsaţie ω, sau două oscilatoare asupra cărora acţionează forţe formează împreună un oscilator (vezi 29). Oscilaţiile pe care le-ar executa oscilatorul echivalent sub acţiunea a două forţe elastice paralele au aceeaşi pulsaţie ω, dar amplitudini şi faze iniţiale diferite.

*Descrierea cantitativă a compunerii a două oscilaţii paralele de frecvenţe egale



30

Un oscilator efectuează sub acţiunea forţei elastice F_1 o mişcare armonică descrisă de ecuaţia elongaţiei:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}),$$

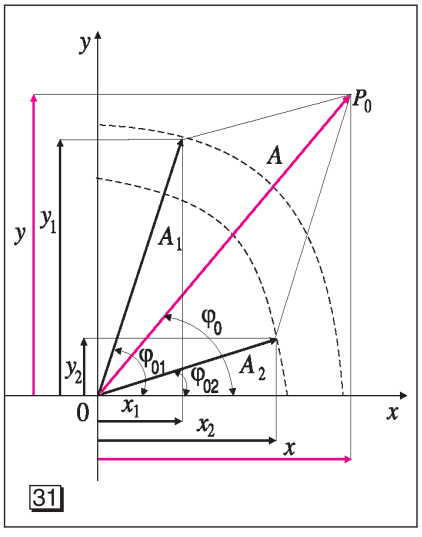
iar sub acţiunea forţei elastice F_2 (paralelă cu F_1) efectuează o mişcare armonică descrisă de ecuaţia elongaţiei:

$$y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}) \quad \text{(vezi 30)}.$$

Dacă aceste două forţe acţionează concomitent asupra oscilatorului considerat, atunci elongaţia va fi egală cu suma elongaţiilor paralele, la orice moment de timp:

$$y = y_1 + y_2 = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

adică $A_1\sin(\omega t + \varphi_{01}) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$.



31

Oscilaţiile liniare pot fi obţinute prin proiecţia pe o axă a unui vector $\vec{A}$ al cărui modul este egal cu amplitudinea oscilaţiei şi care se roteşte în plan cu viteza unghiulară ω (proiecţiile vârfului vectorului pe axe au aceeaşi dependenţă de timp ca şi mişcările oscilatorii armonice).

Augustin Jean Fresnel (1788-1827), fizician francez, a folosit o reprezentare grafică cunoscută sub numele de **diagrama fazorială**, în care mişcărilor oscilatorii armonice le asociem câte un fazor, adică un vector rotitor, cu mărimea egală cu amplitudinea oscilaţiei şi înclinat faţă de direcţia axei *Ox* cu unghiul fazei iniţiale (vezi 31).

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

Compunem vectorial amplitudinile A_1 şi A_2 şi obţinem:

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi_0}$, unde $\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 = \varphi_{01} - \varphi_{02}$.

Proiecţia vectorului amplitudine rezultantă A este egală cu suma proiecţiilor celor doi vectori A_1 şi A_2 pe aceeaşi axă:

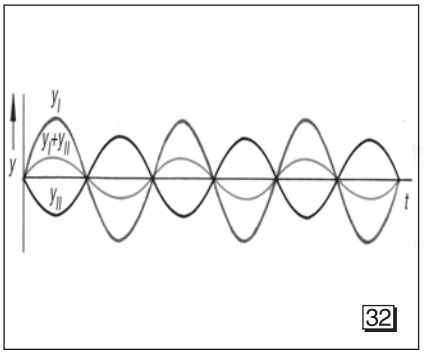
$$\begin{cases} A\sin\varphi_0 = A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02} \\ A\cos\varphi_0 = A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}}.$$

Cazuri particulare:

a) Dacă $\Delta\varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, atunci oscilaţiile sunt în cuadratură şi $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$.

b) Dacă $\Delta\varphi = 2n\pi$, atunci oscilaţiile sunt în fază și $A = A_1 + A_2$.

c) Dacă $\Delta\varphi = (2n+1)\pi$, atunci oscilaţiile sunt în opoziţie de fază și $A = |A_1 - A_2|$ (vezi 32).



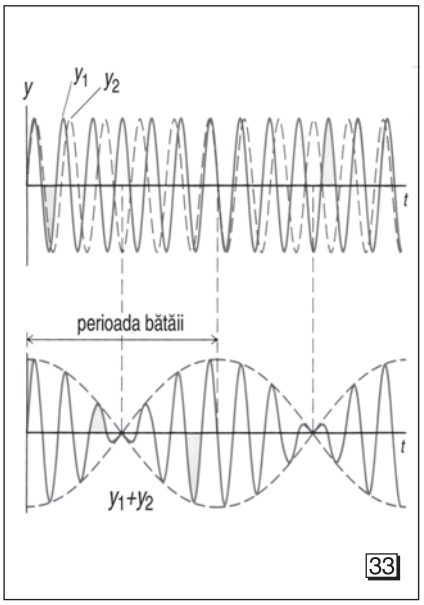
32

d) **Bătăile** se obţin din compunerea a două oscilaţii armonice paralele de frecvenţe diferite, $\omega_1 \neq \omega_2$, dar apropiate ca valoare.

Considerăm cazul $A_1 = A_2 = A$ (vezi 33):

$$\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\,\sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t = 2A\cos(\Delta\omega)t\,\sin\omega t,$$

unde am notat $\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ și $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$.



33

Bătăile sunt oscilaţii cu pulsaţia $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ şi amplitudinea variabilă periodic, de perioadă: $T_{bătăi} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}$.

Dacă diferenţa $\Delta\omega$ a pulsaţiilor este mică, atunci primul factor, $\cos(\Delta\omega)t$, şi amplitudinea rezultantă, $A_{rez} = 2A\cos(\Delta\omega)t$, se modifică lent în timp.

Amplitudinea oscilaţiei rezultante trece printr-o valoare maximă şi apoi minimă, valori care se succed cu frecvenţa:

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2.$$

Urechile noastre deosebesc bătăile dacă $\Delta\nu < 10$ Hz.

Reţine!

Amplitudinea rezultantă a două oscilaţii paralele de frecvenţe egale este:

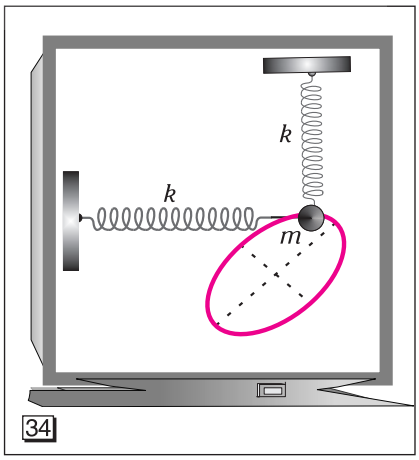
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi_0},$$

unde $\varphi_0 = \operatorname{arctg}\varphi_0$; $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}}$.

Bătăile sunt oscilații cu pulsația $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ și amplitudinea variabilă periodic, de perioadă:

$$T_{bătăi} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți



34

*Descrierea cantitativă a compunerii a două oscilaţii perpendiculare de frecvenţe egale

Considerăm un punct material de masă m, care este solicitat simultan să oscileze armonic sub acţiunea a două resorturi elastice identice legate pe două direcţii perpendiculare, ca în figura 34.

Considerăm cazul particular când cele două mişcări oscilatorii perpendiculare au frecvenţele egale.

Scriem ecuaţiile elongaţiilor pe cele două direcţii:

$$x = A_1\sin(\omega t + \varphi_{01}); \quad y = A_2\sin(\omega t + \varphi_{02}).$$

Eliminăm timpul din aceste două ecuaţii, scrise astfel:

$$\frac{x}{A_1} = \sin(\omega t + \varphi_{01}) = \sin\omega t\cos\varphi_{01} + \cos\omega t\sin\varphi_{01};$$

$$\frac{y}{A_2} = \sin(\omega t + \varphi_{02}) = \sin\omega t\cos\varphi_{02} + \cos\omega t\sin\varphi_{02}.$$

Înmulţim ecuaţiile cu $\cos\varphi_{02}$ şi, respectiv, cu $\cos\varphi_{01}$. După aceea, le scădem şi dăm factor comun $\cos\omega t$, între termenii din dreapta. Obţinem:

$$\frac{x}{A_1}\cos\varphi_{02} - \frac{y}{A_2}\cos\varphi_{01} = \cos\omega t(\sin\varphi_{01}\cos\varphi_{02} + \sin\varphi_{02}\cos\varphi_{01}),$$

unde am folosit formula trigonometrică:

$$\sin\varphi_{01}\cos\varphi_{02} - \sin\varphi_{02}\cos\varphi_{01} = -\sin(\varphi_{02} - \varphi_{01}).$$

Analog înmulţim ecuaţiile cu $\sin\varphi_{02}$ şi, respectiv, cu $\sin\varphi_{01}$. După aceea, le scădem şi dăm factor comun $\sin\omega t$ între termenii din dreapta. Obţinem:

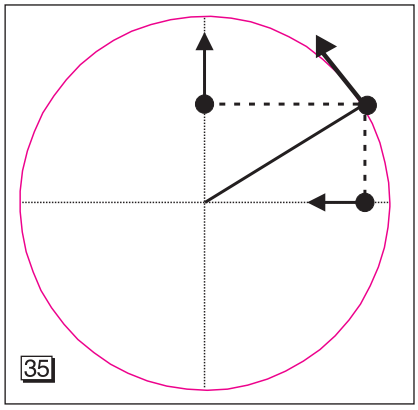
$$\frac{x}{A_1}\sin\varphi_{02} - \frac{y}{A_2}\sin\varphi_{01} = \sin\omega t(\cos\varphi_{01}\sin\varphi_{02} - \cos\varphi_{02}\sin\varphi_{01}),$$

unde am folosit aceeaşi formula trigonometrică.

Ridicăm la pătrat ecuaţiile obţinute şi, după adunarea lor, rezultă:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \sin^2(\varphi_{02} - \varphi_{01}).$$

Această ecuaţie este cunoscută ca **ecuaţia generalizată a elipsei** (rotită faţă de axele de coordonate). Dacă $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, atunci: $\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 = 1$ (vezi 35).


35

ⓘ Traiectoria eliptică din figura 34 devine circulară ca în figura 35 dacă amplitudinile oscilațiilor sunt egale ($A_1 = A_2$).

Dacă oscilațiile sunt în fază: $\Delta\varphi = 2n\pi$, sau în opoziție de fază: $\Delta\varphi = (2n+1)\pi$, atunci obținem ecuațiile:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = \pm\frac{A_2}{A_1}x,$$

deci traiectoria eliptică devine liniară.

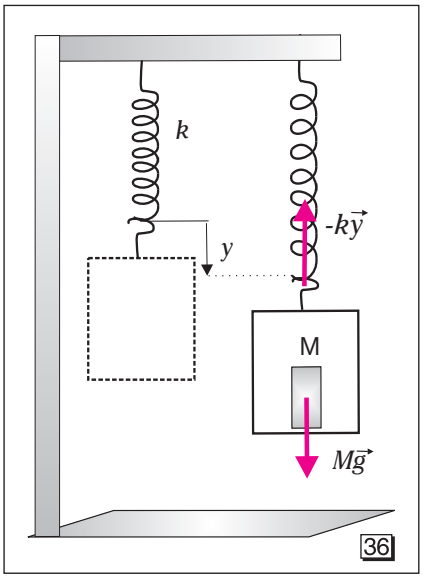
Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

Teste pentru autoevaluare

Testul 1

I. Problemă experimentală

Un pendul elastic cu masa m_1 cunoscută este scos din poziţia de echilibru static şi lăsat să oscileze liber (vezi 36). Se cronometrează timpul t în care se efectuează N oscilaţii şi se calculează valoarea perioadei $T = t/N$. Calculează valoarea constantei de elasticitate pentru mai multe corpuri (cu masele m_2, m_3, m_4, ...), valoarea medie şi erorile. Descoperă expresia de calcul a constantei de elasticitate a resortului cu valorile mărimilor de mai sus.



36

II. Găseşte răspunsul corect la problemele următoare:

1. Defazajul între elongaţia şi acceleraţia de oscilaţie a oscilatorului liniar armonic (vezi 37) este:

a) $\Delta\varphi = 0$; b) $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$; c) $\Delta\varphi = \pi$; d) $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

2. Valoarea maximă a vitezei oscilatorului armonic este:

a) $v_{max} = -\omega^2 A$; b) $v_{max} = \omega A$; c) $v_{max} = \frac{\omega^2}{A}$; d) $v_{max} = \omega^2 A$.

3. În punctele în care energia cinetică este egală cu energia potenţială elastică, elongaţia oscilatorului armonic este:

a) $y = \pm\frac{A\sqrt{3}}{3}$; b) $y = \pm A\sqrt{3}$; c) $y = \pm A\sqrt{2}$; d) $y = \pm\frac{A\sqrt{2}}{2}$.

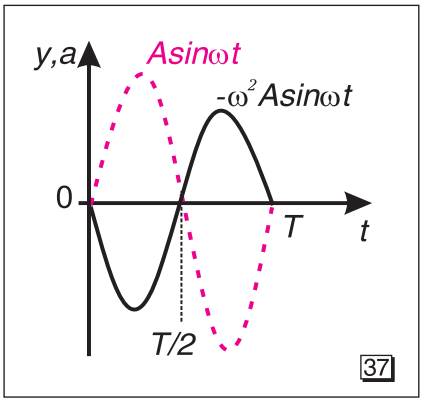
4. În punctele în care elongaţia este jumătate din amplitudine, raportul între energia cinetică şi cea potenţială elastică a oscilatorului armonic este:

a) $\frac{E_c}{E_p} = 1$; b) $\frac{E_c}{E_p} = 2$; c) $\frac{E_c}{E_p} = 3$; d) $\frac{E_c}{E_p} = 4$.

5. Oscilaţiile ionilor din reţeaua cristalină a unui metal sunt oscilaţii mecanice? Amplitudinea de oscilaţie a ionilor dintr-o reţea cristalină depinde de:

a) temperatura metalului; b) densitatea metalului;

c) masa metalului; d) volumul metalului.

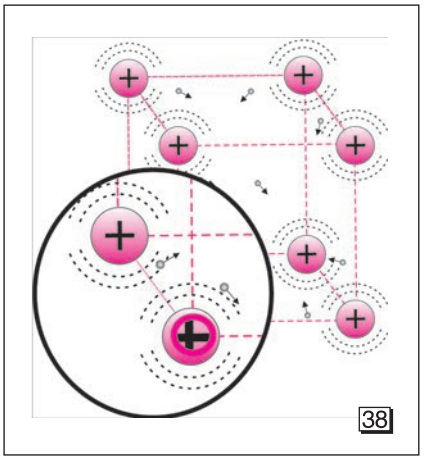


37

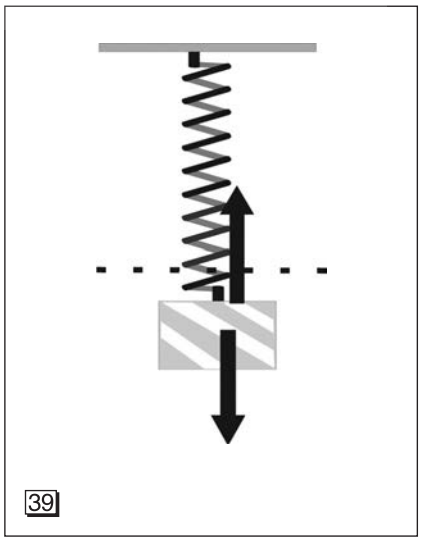
Răspunsuri:

I. Din legea perioadei pendulului elastic, obţinem expresia de calcul a constantei de elasticitate a resortului: $k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$.

II. 1. c. **2.** b. **3.** d. **4.** c. **5.** Nu sunt oscilaţii mecanice; a (vezi 38).

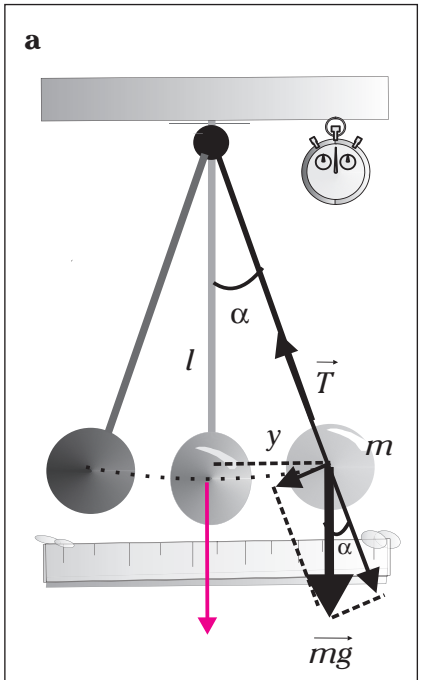

38

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

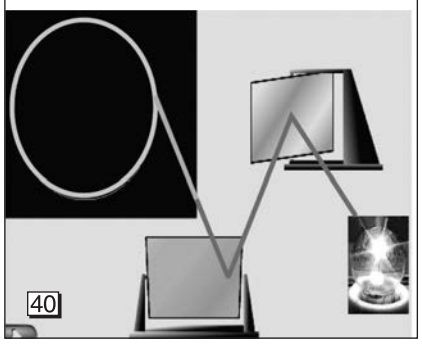


39

a



b



40

Testul 2

Rezolvă problemele următoare (grad mic de dificultate):

1. Un corp de masă $m = 0{,}1$ kg, fixat de un resort, execută o mişcare oscilatorie armonică cu frecvenţa $\nu = 20$ Hz şi amplitudinea $A = 0{,}15$ m (vezi 39). Calculează elongaţia oscilatorului atunci când energia cinetică este egală cu energia potenţială.

2. Calculează lungimea firului de suspensie al unui pendul gravitaţional de perioadă $T = 2$ s (vezi 40**a**). Dacă pendulul execută $n = 10$ oscilaţii complete în 20 s, calculează valoarea acceleraţiei gravitaţionale în locul unde oscilează.

3. Un punct material oscilează după legea de mişcare $y(t) = A\sin(\pi t + \pi/4)$ cm. Calculează raportul dintre energia cinetică şi cea potenţială pentru momentul de timp $t = T/4$.

4. Ce mărime rămâne constantă în timp la mişcările oscilatorii armonice? Când este maximă energia cinetică?

5. Un oscilator armonic liniar are legea de mişcare $y(t) = A\sin(\omega t + \pi/6)$. Cât este valoarea elongaţiei la momentul iniţial?

6. Un pendul elastic cu masa $m = 1$ kg are în timpul mişcării viteza maximă $v_{max} = 0{,}1$ m/s şi acceleraţia maximă $a_{max} = 2$ m/s^2. Calculează constanta elastică.

7. Dacă legea de mişcare a unui oscilator armonic este $y = 4\cos(10\pi t + \pi)$[cm], calculează perioada de oscilaţie. Calculează valoarea elongaţiei la momentele de timp $t = 0$ şi $t = T/2$.

8. Energia potenţială maximă a oscilatorului armonic depinde de timp?

9. Două mişcări oscilatorii armonice paralele cu aceeaşi pulsaţie au ecuaţiile: $y_1 = 3\sin 10t$ [cm] şi $y_2 = 4\cos 10t$ [cm]. Găseşte amplitudinea mişcării rezultante.

10. Ce traiectorie descrie spotul luminos pe ecran, dacă cele două oglinzi oscilează în jurul unor axe perpendiculare (vezi 40**b**)?

Răspunsuri:

1. $y = 0{,}707$ A. **2.** $l = 1$ m; $g = 9{,}8$ m/s^2. **3.** $E_c/E_p = 1$. **4.** Energia totală; la trecerea oscilatorului liniar armonic prin poziţia de echilibru. **5.** $y = 0{,}5\ A$. **6.** $k = 400$ N/m. **7.** $T = 0{,}2$ s. $y(0) = -A$. $y(T/2) = A$. **8.** nu. **9.** $A = 5$ cm. **10.** Spotul luminos descrie pe ecran mişcarea rezultată din compunerea celor două oscilaţii perpendiculare ale oglinzilor.

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

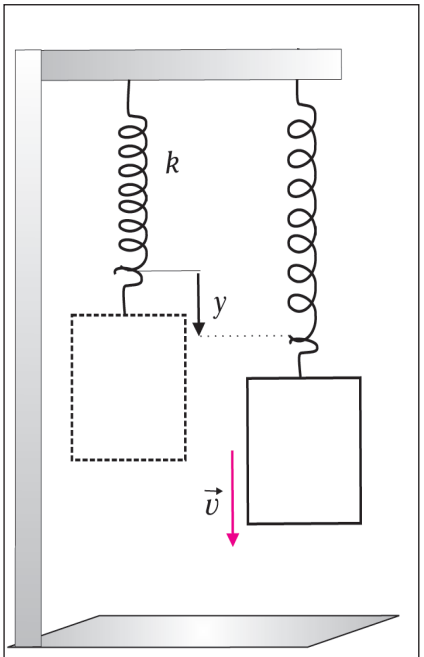
Testul 3

Rezolvă problemele următoare (grad mediu de dificultate):

1. Un pendul elastic are la un moment dat elongaţia y_1 şi viteza v_1 (vezi 41). La un alt moment are elongaţia y_2 şi viteza v_2. Amplitudinea mişcării oscilatorii se determină cu relaţia:

a) $A=\sqrt{\frac{v_2^2y_1^2+v_1^2y_2^2}{v_2^2+v_1^2}}$; b) $A=\sqrt{\frac{v_2^2y_1^2-v_1^2y_2^2}{v_2^2-v_1^2}}$;

c) $A=\sqrt{\frac{v_2^2y_1^2+v_1^2y_2^2}{v_2^2-v_1^2}}$; d) $A=\sqrt{\frac{v_2^2y_1^2-v_1^2y_2^2}{v_2^2+v_1^2}}$.



41

2. Două mişcări oscilatorii armonice paralele sunt descrise de ecuaţiile elongaţiilor reprezentate în figura 42. Găseşte defazajul între elongaţiile acestor mişcări.

3. Două resorturi verticale de lungimi egale, având constantele elastice k_1 şi, respectiv, k_2, sunt fixate de podea. Capetele din partea lor superioară sunt unite printr-o bară rigidă de greutate neglijabilă, aşa încât să fie paralele. Sistemul astfel realizat este supus acţiunii unei forţe F, care acţionează vertical la mijlocul barei rigide. Constanta elastică echivalentă a sistemului este:

a) $k_e=\frac{4k_1k_2}{k_1+k_2}$; b) $k_e=\frac{2k_1k_2}{k_1+k_2}$; c) $k_e=k_1+k_2$; d) $k_e=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$.

4. Un pendul elastic, cu masa $m = 0{,}1$ kg, oscilează liniar armonic cu pulsaţia $\omega = 3{,}14$ rad/s. Calculează constanta elastică a resortului.

5. Ecuaţia elongaţiei unui oscilator liniar armonic este $y = 10\sin(5t + \pi)$ [m]. Care sunt valorile amplitudinii oscilaţiilor şi fazei iniţiale a oscilaţiilor?

6. Un corp execută mişcarea oscilatorie liniar armonică descrisă de ecuaţia elongaţiei $y = 2\sin(3{,}14t+\pi)$ [m]. Află valorile maxime ale vitezei şi acceleraţiei oscilaţiilor.

7. Legea de oscilaţie a unui punct material, de masă $m = 2$ kg, este $y = 4(\sin 20t + \sqrt{3}\cos 20t)$ [cm]. Calculează amplitudinea oscilaţiei şi faza iniţială a oscilaţiei.

Răspunsuri:

1. b. **2.** $\Delta\varphi = \pi/2$. **3.** a. **4.** $k = 0{,}1$ N/m. **5.** $A = 10$ m; $\varphi_0 = \pi$ rad. **6.** $v_{max} = 6{,}28$ m/s. $a_{max} = 20$ m/s². **7.** $A = 8$ cm, $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$.

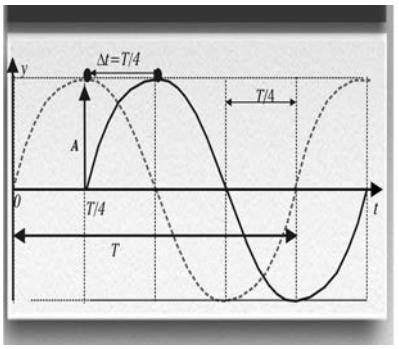
Indicație:

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$;

$$\begin{cases} y_1 = A\sin\varphi_1 \\ v_1 = \omega A\sin\varphi_1 \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} y_2 = A\sin\varphi_2 \\ v_2 = \omega A\sin\varphi_2 \end{cases}$$



42

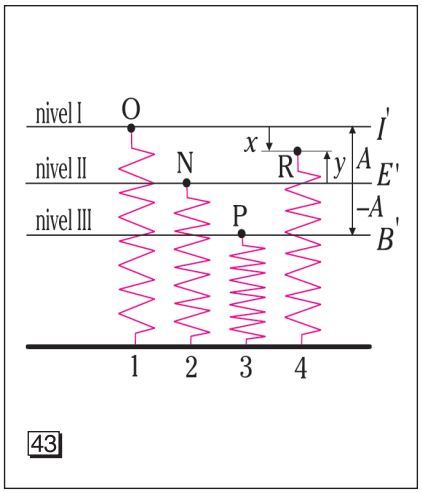
Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

Testul 4

***Rezolvă problemele următoare (grad ridicat de dificultate):**

1. O bară omogenă este plasată în echilibru pe doi tamburi identici, cu axele orizontale şi la acelaşi nivel. Tamburii se rotesc înspre interior la contactul cu bara, în sens invers unul faţă de celălalt. Distanţa dintre axele tamburilor este $2a$, iar coeficientul de frecare între bară şi tamburi este μ. Bara poate efectua mici oscilaţii armonice stânga-dreapta. Perioada acestor oscilaţii este:

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{\mu g}}$; b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{3a}{2\mu g}}$; c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{2\mu g}}$; d) $T = \infty$.



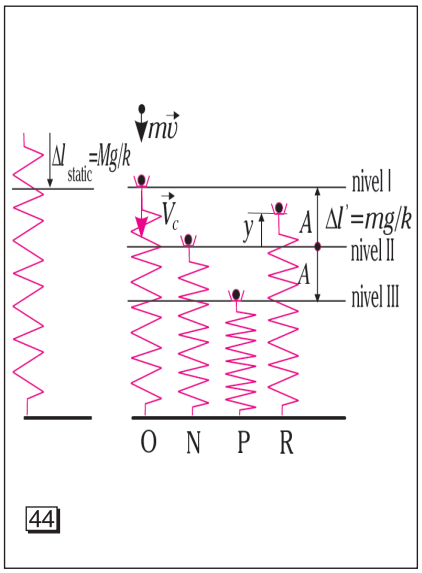
43

2. Un taler de masă M este atârnat în capătul de jos al unui resort de masă neglijabilă şi constantă de elasticitate k. De la înălţimea h cade pe acesta o bucată de plastilină de masă m, sistemul începând să oscileze. Amplitudinea oscilaţiilor sistemului este:

a) $A = \frac{mg}{k}\cdot\sqrt{1+\frac{2kh}{(M+m)g}}$; c) $A = \frac{mg}{k}\cdot\frac{kh}{Mg}$;

b) $A = \frac{mg}{k}\cdot\sqrt{1-\frac{2kh}{(M+m)g}}$; d) $A = \frac{mg}{k}$.

3. Pe capătul superior al unui resort nedeformat, de masă neglijabilă şi constantă de elasticitate k, este aşezat un corp de masă m (vezi 43).Calculează amplitudinea oscilaţiilor sistemului, considerând că oscilaţiile libere încep din punctul O de pe nivelul 1, sub acţiunea corpului de masă m.



44

4. Pe capătul superior al unui resort nedeformat, de masă neglijabilă şi constantă de elasticitate k, este aşezat un taler de masă M, care este ciocnit plastic de un corp de masă m şi cu viteza v, pe verticală de sus în jos (vezi 44). Notăm cu A amplitudinea oscilaţiilor şi cu y elongaţia în starea R. În care din stările O, N, P, R faţă de cele trei nivele se verifică legea conservării energiei?

5. Un resort cu constanta de elasticitate k se taie în n bucăţi de lungime identică. Cele n resorturi obţinute se leagă în paralel. Constanta elastică a acestui sistem este:

a) $k_e = n^2k$; b) $k_e = nk$; c) $k_e = 0{,}5nk$; d) $k_e = k$.

Răspunsuri:

1. a. **2.** a. **3.** $A = mg/k$. **4.** Legea conservării energiei se verifică în stările O, N, P, R faţă de cele trei nivele. **5.** a.

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

1.2. OSCILATORI MECANICI CUPLAŢI

1.2.1. Oscilaţii mecanice întreţinute. Oscilaţii mecanice forţate

După ce un leagăn sau un pendul este împins cu mâna şi apoi este lăsat liber, oscilaţiile sale se amortizează datorită frecărilor cu aerul şi a celor din sistemul de prindere.

Oscilaţiile nu se amortizează, adică amplitudinea acestora rămâne constantă dacă sistemul oscilant primeşte din exterior energia pierdută prin frecări, la intervale de timp egale cu perioada oscilaţiilor libere.

Oscilaţiile unui sistem aflat sub acţiunea periodică a altui sistem se numesc **oscilaţii forţate.**

Dacă transmitem oricărui oscilator impulsuri periodice, la intervale de timp diferite de perioada oscilaţiilor libere, atunci oscilaţiile acestuia sunt forţate, amplitudinile atingând valori mari dacă frecările sunt mici (vezi 1). La turaţii mici ale volantului, firul antrenat de volant dă impulsuri periodice resortului dinamometrului şi se obţin oscilaţii cu amplitudini comparabile cu raza volantului.

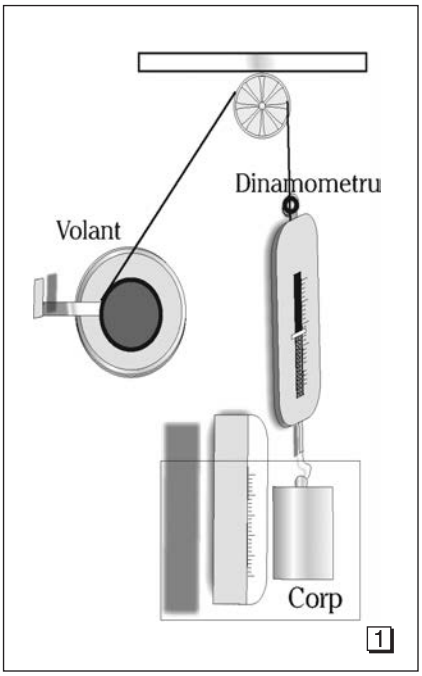
La turaţii din ce în ce mai mari ale volantului, se constată experimental că amplitudinea măsurată devine maximă la o anumită frecvenţă a acestora, iar la turaţii şi mai mari, amplitudinea scade. Constatăm experimental că transferul energiei de la un sistem oscilator la alt sistem oscilator are caracter selectiv şi este optim dacă perioadele acestora sunt egale sau aproximativ egale. Explică ce se va constata dacă oscilatorul se introduce total sau parţial într-un lichid.

Oscilaţii forţate întâlnite în practică sunt:

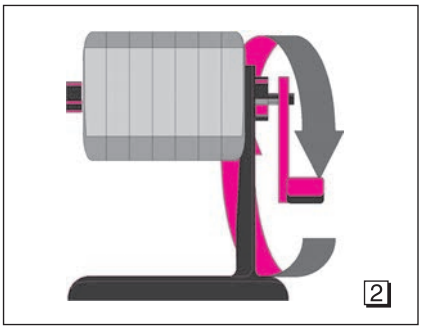
— vibraţiile pieselor nefixate în locurile lor, aflate în sisteme sau dispozitive în mişcare;

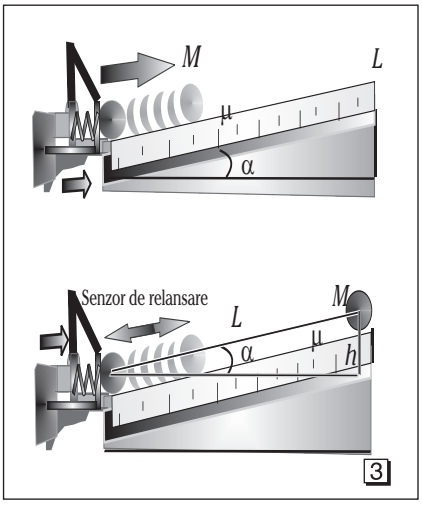
— oscilaţiile plantelor, ale crengilor sau ale podurilor sub acţiunea vântului;

— oscilaţiile autovehiculelor pe un drum cu denivelări.



1


2



3

Probleme propuse

1. Concepe un dipozitiv cu un motoraş electric sau cu un sistem de roţi pentru generarea oscilaţiilor forţate (vezi 2).

2. Lansatorul unei bile este aşezat la baza unui plan înclinat de unghi α, coeficient de frecare μ şi lungime L (vezi 3). Câtă energie trebuie să primească bila când revine la baza planului înclinat pentru ca aceasta să ajungă la aceeaşi înălţime h?

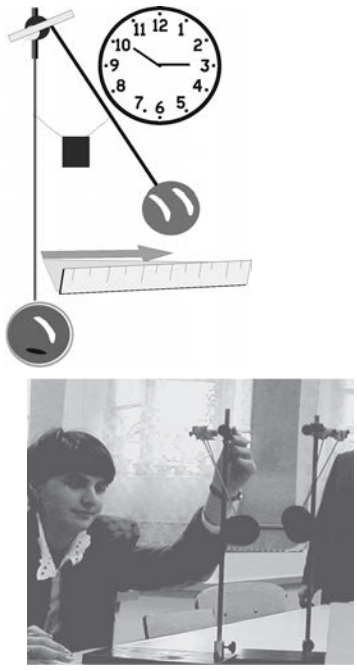
Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

1.2.2. *Rezonanţa

Ai observat că leagănele fixate pe acelaşi cadru intră în oscilaţie atunci când numai unul este scos din poziţia de ehilibru?

Dacă se cuplează două pendule de lungimi diferite şi îl scoatem din repaus pe unul dintre ele, atunci acesta devine excitator pentru cel rămas în repaus. Dacă lungimea şi deci frecvenţa oscilaţiilor excitatorului este mult diferită de cea proprie a oscilatorului aflat în repaus, atunci amplitudinea celui din urmă este foarte mică, transferând foarte puţină energie. Se pune în mişcare pendulul excitator care transmite impulsuri periodice altor pendule prin intermediul tijei de care sunt suspendate (vezi 4).

Dacă pendulele au lungimi egale cu cea a pendulului excitator, atunci acestea vor avea amplitudinea maximă.



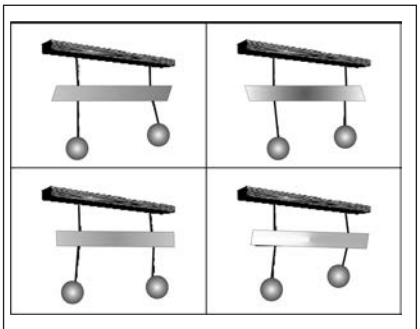
4

*Transferul de energie între doi oscilatori cuplaţi

Să considerăm două pendule de aceeaşi lungime l şi de aceeaşi masă m, legate printr-un resort sau printr-un cordon elastic (vezi 5).

Mişcările fiind influenţate reciproc, spunem că aceste două sisteme oscilante sunt cuplate. Dacă imprimăm unuia dintre pendule o mişcare oscilatorie faţă de poziţia de echilibru, energia mişcării se transmite integral la celălalt pendul după un interval de timp.

Procesul de transfer optim al energiei între oscilatoare cuplate, când frecvenţa oscilatorului excitator este egală cu frecvenţa oscilatorului excitat, se numeşte **rezonanţă.**



5

Un oscilator (oscilatorul excitator) îşi pierde treptat energia, micşorându-şi amplitudinea până când ajunge în repaus, iar celălalt (oscilatorul excitat) preia, tot treptat, energia cedată de primul, amplitudinea sa de oscilaţie devenind din ce în ce mai mare şi atingând valoarea maximă când primul ajunge în repaus. Apoi rolurile se schimbă, cel de-al doilea transferă energie primului pendul.

Mişcările ambelor pendule sunt caracterizate de amplitudini care se modifică ciclic şi se amortizează datorită frecărilor. Acest proces reprezintă o oscilaţie forţată pentru oscilatorul excitat, în cazul particular al rezonanţei. Când cuplajul este mai strâns, transferul energetic se face într-un timp mai scurt. Pendulul excitator este în avans de fază cu $\Delta\varphi = \pi/2$ faţă de pendulul rezonator, cum este pendulul excitat în condiţii de rezonanţă.

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

CUPRINS

Prefață 5

Capitolul 1. Oscilații și unde mecanice **7**
1.1. Oscilatorul mecanic 8
1.1.1. Fenomene periodice. Procese oscilatorii în natură și în tehnică 8
1.1.2. Mărimi caracteristice mișcării oscilatorii 9
1.1.3. Oscilații mecanice amortizate 12
1.1.4. *Modelul „oscilator armonic” 14
1.1.5. Compunerea oscilațiilor paralele. **Compunerea oscilațiilor prependiculare* 20
Teste pentru autoevaluare **23**

1.2. Oscilatori mecanici cuplați 27
1.2.1. Oscilații mecanice întreținute. Oscilații mecanice forțate 27
1.2.2. *Rezonanța 28
1.2.3. Consecințe și aplicații 30
Teste pentru autoevaluare **33**

1.3. Unde mecanice 35
1.3.1. Propagarea unei preturbații într-un mediu elastic. Transferul de energie 35
1.3.2. *Modelul „undă plană”. Periodicitatea spațială și temporală 38
Teste pentru autoevaluare **42**
1.3.3. Reflexia și refracția undelor mecanice 43
1.3.4. Unde seismice 46
1.3.5. Interferența undelor mecanice. Unde staționare 50
1.3.6. Acustica 57
1.3.7. **Difracția undelor mecanice — studiu calitativ* 60
1.3.8. Ultrasunete și infrasunete. Aplicații în medicină, industrie, tehnică militară 61
Teste pentru autoevaluare **65**

Capitolul 2. Oscilații și unde electromagnetice **69**
2.0. **Curentul alternativ* (recapitualrea unor noțiuni de bază) 70
2.1. Circuitul RLC în curent alternativ 72
Test pentru autoevaluare **84**
Teste pentru autoevaluare **89**

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

2.2. Oscilaţii electromagnetice libere. Cirucitul oscilant 91
2.3. Câmpul electromagnetic. Unda electromagnetică 98
2.4. Clasificarea undelor electromagnetice 102
2.5. Aplicaţii 105
Test pentru autoevaluare 108

Capitolul 3. Optica ondulatorie 109
3.1. Dispersia luminii. **Interpretare electromagnetică* 110
3.2. Interferenţa 113
3.2.1. *Dispozitivul Young 115
3.2.2. Interferenţa localizată. Aplicaţii 118
3.3. **Difracţia luminii. Aplicaţii* 121
3.4. **Polarizarea luminii. Aplicaţii* 127
Test pentru autoevaluare 132

Capitolul 4. **Elemente de teoria haosului* 133
4.1. **Determinism şi predictibilitate. Condiţii. Modele* 134
4.2. **Determinism şi impredictibilitate. Comportamentul haotic. Condiţii* 137
4.3. **Descrierea comportamentului haotic. Spaţiul fazelor. Atractori clasici şi stranii* 140
Test pentru autoevaluare 145
4.4. **Elemente de geometrie fractală* 146
Teste pentru autoevaluare 150

Bibliografie selectivă 152